

المدة: ساعة ونصف

العلامة: 100 درجة

الاسم: حارث محمد

امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018

أسئلة المقرر الثاني الجبرية (2)

سنة ثانية رياضيات

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول (39 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لأن مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب تحلة الخطأ فقط:

(1) أن الحلقة $R = [0, 3, 6, 9, 12]$ هي حقل بالنسبة للجمع والمضروب بالمقياس 15. خطأ

(2) أن حقله المصفوفات $M_2(Z)$ فوق حقله الأعداد الصحيحة Z تحقق خاصية الانفصال. خطأ

(3) معوا حقله الخارج $Z_{12}/3Z_{12}$ يساوي 12. خطأ

(4) أن $4Z/8Z$ مثلية في حقله الخارج $2Z/8Z$. خطأ

(5) أن الحلقة $R = Z \oplus Z$ هي حقله ثلثة لأن Z حقله ثلثة. خطأ

(6) أن $3 + 6Z_{12}$ هو عنصر حقله في الحلقة $Z_{12}/6Z_{12}$. خطأ

(7) أن المثلية $\langle 4 \rangle$ أولية في الحلقة Z_{12} . خطأ

(8) أن المثلية $(3Z + 5Z)$ أعظمية في حقله الأعداد الصحيحة Z . خطأ

(9) أن الحلقة $(Z_{10}, +, \cdot)$ حقله موضعية. خطأ

(10) إذا كانت $A = 2Z$, $B = 6Z$ مثليتين في Z فإن $A : B = 3Z$. خطأ

(11) إذا كانت $R = Z_{10}$ فإن $J(R) = \langle 6 \rangle$. خطأ

(12) إذا كانت $A = \langle 6 \rangle$ مثلية في حقله الأعداد الصحيحة Z فإن $\text{rad } A = \langle 3 \rangle$. خطأ

(13) أن المتعدنية $2x + 1 \in Z_4[x]$ هي جذوية أولية فوق Z_4 . خطأ

السؤال الثاني (45 درجة):

أثبت صحة ما يلي: لتكن R حقله واحدة و A, B مثليتين في R .
(1) أن مركز الحلقة R $Z(R) = \{x : x \in R; ax = xa, \forall a \in R\}$ هو حقله جزئية وواحدة في R . خطأ

(2) إذا كانت R تبديلية والمثليتين A, B تحققان $R = A + B$ فإن $A \cdot B = A \cap B$. خطأ

(3) إذا كانت R تبديلية فإن $\text{rad } R \in J(R)$ حيث $J(R)$ هو أساس جاكسون في R . خطأ

(4) كل مثلية يسارية A متبعة القوى في الحلقة R لا تحتوي عناصر حاملة معكوسة للصفر. خطأ

(5) أن أساس جاكسون $J(R)$ يكون مثلية يسارية صغيرة في R وهي أكبر مثلية يسارية صغيرة في الحلقة R . خطأ

السؤال الثالث (16 درجة):

إذا كانت R حقله تبديلية و A, B مثليتين في R وكان

$\text{rad } A = \sqrt{A} = \{a : a \in R; \exists n \in \mathbb{Z}^+; a^n \in A\}$ أثبت صحة ما يلي:

(1) $\text{rad } A$ مثلية في R .

(2) إذا كانت A أولية فإن $\text{rad } A = A$.

(3) إذا كانت $A = \langle 3 \rangle$, $B = \langle 5 \rangle$, $C = \langle 6 \rangle$ ثلاث مثليات في Z أوجد:

$$\text{rad}(A \cap C + A \cap B)$$

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. أيمن العوجة

2018 - 1 - 16

(1) إياه الحلقة $R = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ هي حقل بالنسبة للجمع والضرب بالمسا من 15. صي لأن.

mod 15	0	3	6	9	12
0	0	0	0	0	0
3	0	9	3	12	6
6	0	3	6	9	12
9	0	12	9	6	3
12	0	6	12	3	9

شرط الواسية $a \cdot 1 = a$

تلاحظ من الجدول أنه R راسدية

وواحد حاصد 6

وهي تبديلية

وهي تامة لأنه لا يوجد $a \neq 0$

$a \neq 0$ بحيث $a \cdot b = 0$

أي لا تحتوي كل عام للصفر

تامة

وهي منطقة تكاملية منتية R هي حقل

(2) راسدية الحلقة المصفوفات $M_2(\mathbb{Z})$ فوق حلقة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} تمتعت خاصية الاختصار. خطأ لأن

خاصية الاختصار تمتعت في المناطق التكاملية و $M_2(\mathbb{Z})$ تحتوي على صفر

وبالتالي ليست تامة وبالتالي ليست منطقة تكاملية R لا تمتعت خاصية الاختصار

$$\{M_2(\mathbb{Z}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \neq 0 \in \mathbb{Z}\} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) حلقة المصفوفات $M_2(\mathbb{Z}_{12})$ هي حقل لأن

$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, \dots, 11\}$

$$\frac{\mathbb{Z}_{12}}{3\mathbb{Z}_{12}} = \{0 + 3\mathbb{Z}_{12}, 1 + 3\mathbb{Z}_{12}, \dots, 11 + 3\mathbb{Z}_{12}\}$$

نوه العاصد وهو $1 + 3\mathbb{Z}_{12}$

شرط الميز $n \cdot 1 = 0$; $n \neq 0$

$$1. 1 + 3\mathbb{Z}_{12} \cdot 1 + 3\mathbb{Z}_{12}$$

$$2. 1 + 3\mathbb{Z}_{12} \cdot 2 + 3\mathbb{Z}_{12}$$

$$\dots 12. 1 + 3\mathbb{Z}_{12} \cdot 12 \text{ mod } 12 + 3\mathbb{Z}_{12} = 0 + 3\mathbb{Z}_{12}$$

الحل الميز هو 12

4. $\frac{4z}{8z}$ مكافئ في حلقة الخارج $\frac{2z}{8z}$ صحيح لأنه

مما تكو $\frac{4z}{8z}$ مكافئ $\frac{2z}{8z}$ يجب أن يحقق شرطين

(1) $2z$ مكافئ $4z$ ولتحقق من ذلك $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8 \in 8z \Rightarrow \frac{2z}{8z} \sim \frac{4z}{8z}$

(2) $4z$ يقسم $8z$ ولتحقق من ذلك وهو تقو بالضبط $\frac{4z}{8z} \sim \frac{2z}{8z}$ ←

(5) إثبات الحلقة $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ هي حلقة تامة لأنه حلقة تامة
خطأ لأنه $R \ni (1,0) \neq (0,1)$

$(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$

R تحتوي عناصر للضرب ليس تامة

(6) $3 + 6\mathbb{Z}_{12}$ هو عنصر جامع في الحلقة $\frac{\mathbb{Z}_{12}}{6\mathbb{Z}_{12}}$

صحيح لأنه $(3)^2 + 6\mathbb{Z}_{12} = 9 + 6\mathbb{Z}_{12}$

$$= 3 + 6\mathbb{Z}_{12}$$

← $3 + 6\mathbb{Z}_{12}$ هو عنصر جامع في الحلقة $\mathbb{Z}_{12}/6\mathbb{Z}_{12}$

(7) إثبات المكافئ $(3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z})$ أعظمية في حلقة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z}

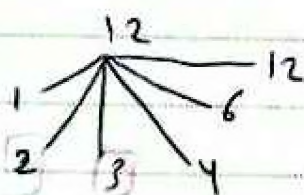
خطأ لأنه $3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z} = \gcd(3,5)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

وللثابتية الأعظمية لا يجب أن تكون الحلقة فتر

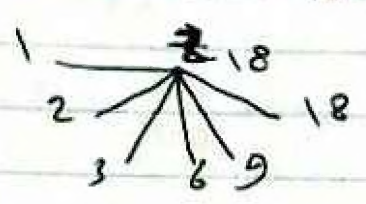
(8) إثبات المكافئ $\langle 4 \rangle$ أدلية في الحلقة \mathbb{Z}_{12}

خطأ لأنه المثاليات الأعظمية في \mathbb{Z}_{12}

هي $\langle 2 \rangle$ و $\langle 3 \rangle$



9) إياه الحلقة $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ حلقة مرفقة خطأ لأن
 الحلقة المرفقة هي من تلك ما لي أنظري
 واحد فقط
 و \mathbb{Z}_{18} تلك ~~حلقة~~ أكثر من مثالي أمثلي واحد
 من تلك $\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle$

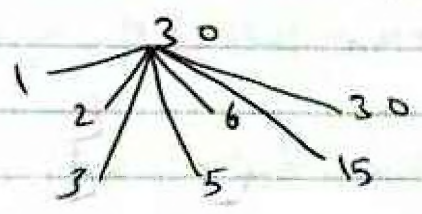


10) إذا كانت $B = 6\mathbb{Z}$ و $A = 2\mathbb{Z}$ مثاليتين في \mathbb{Z} فإنه $A:B = 3\mathbb{Z}$ خطأ لأنه

بما أنه A, B مثاليتين في \mathbb{Z} و \mathbb{Z} مبادية و راصدية فإنه يجب أنه
 يتحقق أن $A:B = A$

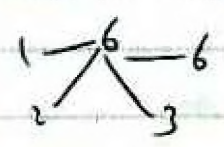
$\Rightarrow A:B = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$

11) إذا كانت $R = \mathbb{Z}$ فإنه $J(R) = \langle 6 \rangle$ خطأ لأنه
 $J(R)$ هو تقاطع المثاليات الأولية في \mathbb{Z}



$J(R) = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle \cap \langle 5 \rangle$
 $= \text{ICM}(2, 3, 5)$
 $= 30 \bmod 30 = 0 \neq \langle 6 \rangle$

12) إذا كانت $A = \langle 6 \rangle$ مثالية في حلقة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} فإنه $\text{rad } A = \langle 3 \rangle$ خطأ لأنه
 $\text{rad } A$ هو تقاطع المثاليات الأولية في \mathbb{Z}



$\text{rad } A = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle$
 $= \text{ICM}(2, 3) = \langle 6 \rangle \neq \langle 3 \rangle$

13) إياه الحلقة مبادية $\mathbb{Z}_4[x]$ $2x+1 \in \mathbb{Z}_4[x]$ حدودية أولية في \mathbb{Z}_4

صحيح لأنه $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $f(x) = 2x+1$

$f(0) = 2(0)+1 = 1 \neq 0$
 $f(1) = 2(1)+1 = 3 \neq 0$
 $f(2) = 2(2)+1 = 5 \bmod 4 = 1 \neq 0$
 $f(3) = 2(3)+1 = 7 \bmod 4 = 3 \neq 0$

\Rightarrow حدودية مرفقة
 كونها لم تكن أي من

موزاييك